

González Martínez, A.; Martínez Rodríguez, A.; Gómez Águila, M.V. (202x) Mechanic-Mathematical Model of Javelin Flight. Revista Internacional de Medicina y Ciencias de la Actividad Física y el Deporte vol. X (X) pp. xx. <http://cdeporte.rediris.es/revista/>___*

ORIGINAL

MODELACIÓN MECÁNICO-MATEMÁTICA DEL VUELO DE LA JABALINA

MECHANIC-MATHEMATICAL MODEL OF JAVELIN FLIGHT

González Martínez, A.¹; Martínez Rodríguez, A.² y Gómez Águila, M.V.³



¹ Master en Ciencias. Profesor Auxiliar de la Facultad de Cultura Física de la Universidad Agraria de La Habana (UNAH) (Cuba) alfredo_gonzalez@unah.edu.cu



² Doctor en Ciencias. Profesor de Mérito de la Facultad de Ciencias Técnicas de la UNAH. Asesor Científico de la Facultad de Cultura Física de la UNAH (Cuba) armaro646@gmail.com



³ Maestra en Ciencias. Profesora del Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola. Universidad Autónoma Chapingo (México) mvagui@hotmai.com

AGRADECIMIENTOS: A la Universidad Agraria de La Habana (Cuba) y a la Universidad Autónoma Chapingo (México), por las facilidades brindadas para el desarrollo de investigaciones y publicaciones conjuntas en el marco del convenio de colaboración entre ambas universidades.

Código UNESCO / UNESCO Code: 6301.02 Deporte / Sport.

Clasificación del Consejo de Europa / Council of Europa classification: 17 Otras (Física aplicada al deporte) / Others (Physics applied to sport).

Recibido 18 de mayo de 2021 **Received** May 18, 2021

Aceptado 5 de octubre de 2021 **Accepted** October 5, 2021

RESUMEN

Con vistas al perfeccionamiento del desempeño del atleta durante el lanzamiento de la jabalina, se trazó como objetivo elaborar, sobre la base de la aplicación de la mecánica newtoniana al proceso de vuelo de la jabalina, un modelo matemático y una herramienta computarizada que posibiliten determinar la influencia sobre la trayectoria de vuelo y alcance de la jabalina de los parámetros del lanzamiento en la fase de liberación del implemento. Como resultado se obtienen un modelo matemático y un software que posibilitan predecir el alcance del implemento en función de las propiedades de la jabalina, del aire ambiente y de los parámetros iniciales del lanzamiento. El modelo fue validado comparando

la predicción con resultados experimentales obtenidos en el marco de esta investigación, así como con datos obtenidos de competencias internacionales. El error medio de predicción del alcance de la jabalina, osciló, para diferentes parámetros iniciales, entre 0,65% y 1,58%.

PALABRAS CLAVE: jabalina, trayectoria, modelación matemática.

ABSTRACT

In order to improve the athlete's performance during javelin throw, the objective of obtain a mathematical model to predict the scope and flight trajectory of the implement, in function of the release parameters, was traced. To develop the model, the laws of Newtonian Mechanics were applied in the interaction of the javelin with air and gravity. As a result, a computerized mathematical tool that allows predicting the flight path and scope of the implement, in function of the properties of the javelin, the release parameters and the ambient air conditions, was obtained.

The model was validated by comparing the prediction with experimental results obtained in the framework of this research, as well as with data obtained from international competitions. The mean error obtained during the comparison of the javelin scope calculated with the model, with the actual throwing results, ranged from 0.65% to 1.58%.

KEY WORDS: javelin, flight path, mathematical modeling.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la obtención de mejores desempeños de los atletas en las modalidades del atletismo relacionadas con lanzamientos, ya sea del disco, del martillo o de la jabalina, está condicionado a la aplicación, durante la selección de los parámetros iniciales del lanzamiento, de las leyes de la física que describen la interacción del implemento con el atleta, con las fuerzas gravitatorias y con el aire circundante.

Análisis efectuados sobre el desempeño de atletas del más alto rendimiento (Campos, Brizuela y Ramón, 2004) en el que se incluyó al jabalinista cubano Emeterio González durante el campeonato mundial de atletismo de la IAAF celebrado en 1999, reflejaron deficiencias en los parámetros iniciales del lanzamiento de este atleta que le impidieron incluirse en el cuadro de medallas a pesar de haber imprimido una alta velocidad inicial al implemento. Estas deficiencias pudieran preverse y evitarse si, durante las sesiones de entrenamiento, se introduce un conjunto de resultados científicos emanados de la aplicación de las leyes de la mecánica clásica al proceso de interacción atleta-implemento-aire y que rigen el proceso del vuelo de la jabalina.

De los resultados reportados de las investigaciones relacionadas con el lanzamiento de la jabalina, se evidencia que no es posible investigar a fondo la

influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el lanzamiento y vuelo del implemento, si se abordan exclusivamente estudios experimentales. En este tipo de evento deportivo se hace prácticamente imposible ejecutar un diseño experimental en el que puedan ser fijadas determinadas variables para estudiar entonces la influencia de otras, ya que el lanzador no es una máquina en la que pueda fijarse determinado parámetro con precisión. Esta situación ha llevado a los investigadores al desarrollo de modelos teóricos basados en la aplicación de las leyes de la física y la matemática, que posibiliten, por lo general con el auxilio de computadoras, desentrañar la esencia del proceso de lanzamiento y vuelo de la jabalina.

White (2013) recomienda que efectuar un análisis de sensibilidad durante los eventos de lanzamiento, en particular en el caso de la jabalina, solo es posible mediante un modelo matemático, ya que en la práctica, no es posible solicitar a un atleta que intente realizar repetidos lanzamientos, fijando el ángulo inicial y aplicando diferentes velocidades de liberación del implemento. Plantea que mediante un modelo y una computadora, pueden efectuarse decenas o miles de lanzamientos (virtuales) en un breve tiempo, pudiendo controlarse perfectamente los parámetros de entrada y salida. Asimismo señala que la relación óptima entre el ángulo de lanzamiento y la velocidad de proyección del implemento, con vistas a alcanzar el mayor alcance, puede ser particularmente diferente para cada atleta y que la determinación de este indicador no es posible sin la ayuda de la modelación matemática conjuntamente con la experimentación. Es por esto que la vía de la modelación conceptual, como método de investigación, ha sido abordada por un grupo importante de especialistas (Hatton, 2007; Maryniak *et.al.*, 2009; Chiu, 2009).

El lanzamiento y vuelo de la jabalina es un proceso gobernado fundamentalmente por las leyes de la mecánica, por lo que ha sido preferencia de los científicos dedicados a esta temática, la elaboración de modelos matemáticos basados en estas leyes, que posibiliten desentrañar las interrelaciones entre las diferentes variables de entrada y salida de dicho proceso.

Morris y Bartlett (1996) establecieron un modelo de referencia para el lanzamiento de la jabalina compuesto de tres niveles jerárquicos, situando en un primer nivel, el relacionado con los parámetros iniciales del lanzamiento, que influyen decisivamente en el vuelo y alcance final de la jabalina. Relacionado con este primer nivel jerárquico, varios investigadores de diversos países como Reino Unido (Hatton, 2007), Polonia (Maryniak; Ładyżyńska-Kozdraś, y Golińska, 2009) y Taiwan (Chiu, 2009), entre otros, han desarrollado modelos matemáticos dirigidos a develar la importancia relativa de cada uno de estos parámetros en la trayectoria y alcance del implemento y de esta forma dirigir el proceso de perfeccionamiento del lanzamiento con una fuerte base científica de apoyo.

Hatton (2005) elabora un modelo conceptual a partir de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que incorporan los tres elementos incidentes en el movimiento de la jabalina: el arrastre, la sustentación y la rotación. El modelo tiene en cuenta la intensidad y dirección del viento y brinda como salida la

distancia alcanzada por el implemento. Evaluando el modelo con datos de entrada provenientes de dos competiciones internacionales, logró predicciones en la distancia del lanzamiento con un error dentro del 1% para lanzamientos entre 55-87 m, aunque efectuando determinadas suposiciones con relación a la velocidad del viento, la cual no fue registrada.

Maryniak *et.al.* (2009) desarrollan un modelo del sistema hombre-jabalina conjuntamente con un modelo matemático del vuelo de la jabalina, incluyendo el efecto de las vibraciones elásticas transversales. Efectúan evaluaciones numéricas del modelo para diferentes velocidades y ángulos de liberación, aunque no reportan una validación del modelo sobre la base de su comparación con datos experimentales.

Chiu (2009) elabora un modelo y un método computarizado para establecer condiciones óptimas del lanzamiento de la jabalina y compara los resultados de la aplicación del modelo con datos experimentales obtenidos por Best *et. al.* (1993) y por Mero *et. al.* (1994), obteniendo un error relativo medio entre 4,2% (con jabalina Apollo Olympic New Rules) y 6,8% (con jabalina Held New Rules) al comparar los alcances del implemento calculados y medidos. El modelo numérico aplicado considera las condiciones del viento prevaeciente, así como las fuerzas de arrastre y sustentación aerodinámicas que actúan sobre la jabalina, así como la posición del centro de presiones con relación al centro de gravedad del implemento. Las fuerzas de resistencia y sustentación las determina a partir de expresiones formuladas con anterioridad por Soong (1982).

Jiang y Zhou (2014) proponen un modelo matemático que describe el vuelo de la jabalina, obteniendo los datos referentes a las fuerzas de arrastre, sustentación y el momento angular o de lanzamiento (*pitching moment*) a partir de ensayos en un túnel de viento. En su propuesta exponen los cálculos de optimización realizados mediante una computadora, arrojando como resultado que cuando la velocidad inicial del lanzamiento se encuentra en el rango de los 25 m/s – 30 m/s, el mejor ángulo de lanzamiento es $\theta_0 = 40^\circ$ (θ_0 - ángulo del vector velocidad absoluta de la jabalina con la horizontal en el instante de liberación del implemento), con un ángulo de ataque inicial $\alpha_0 = 11^\circ$ (α_0 - ángulo entre el eje longitudinal de la jabalina y el vector velocidad relativa entre la jabalina y el aire al instante de liberación del implemento). Al mismo tiempo los autores defienden que un ángulo de ataque diferente de cero resultó ser una condición necesaria y suficiente para obtener eficiencia aerodinámica en el vuelo de la jabalina.

Del análisis bibliográfico realizado, se evidencia que la experimentación por sí sola, no constituye una vía suficiente de investigación del proceso de lanzamiento de la jabalina, siendo necesario complementar el método experimental con la obtención y aplicación de modelos matemáticos conceptuales que permitan desentrañar la esencia de los fenómenos que intervienen en dicho proceso. Un modelo matemático de esta naturaleza, debidamente validado, que posibilite predecir la característica de la trayectoria y alcance de la jabalina para diferentes combinaciones de parámetros iniciales de liberación del implemento, constituye una herramienta de gran valor durante el entrenamiento de los atletas, en particular durante la correcta selección de los

parámetros del lanzamiento durante la fase de liberación del implemento. Aunque se reporta en la literatura el desarrollo de modelos matemáticos que describen el proceso de lanzamiento y vuelo de la jabalina, los que son disponibles (Hatton, 2005). solo ofrecen como salida la predicción del alcance del implemento, no posibilitando determinar todas las variables requeridas en los estudios y estando además limitado el nivel de los parámetros de entrada, por lo que no pueden ser aplicados en categorías menores. De esta manera, se traza como objetivos de esta investigación los objetivos que se exponen a continuación.

OBJETIVOS

- Elaborar, sobre la base de la aplicación de las leyes de la Mecánica Newtoniana, un modelo conceptual que posibilite predecir la trayectoria y alcance del vuelo de la jabalina, en función de los parámetros que caracterizan la etapa de liberación del implemento y de la magnitud y dirección del viento prevaleciente;
- Validar el modelo desarrollado mediante la comparación del alcance del implemento calculado, con resultados experimentales y con resultados de predicción de otros modelos reportados.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL MODELO

Para la modelación mecánico-matemática del vuelo de la jabalina, se parte del diagrama de cuerpo libre del implemento (Fig. 1) en un instante de tiempo t , correspondiente a una posición (x, y) de su trayectoria de vuelo, o sea, la trayectoria del centro de gravedad (c.g.) de la jabalina, representada en la figura por una línea azul discontinua.

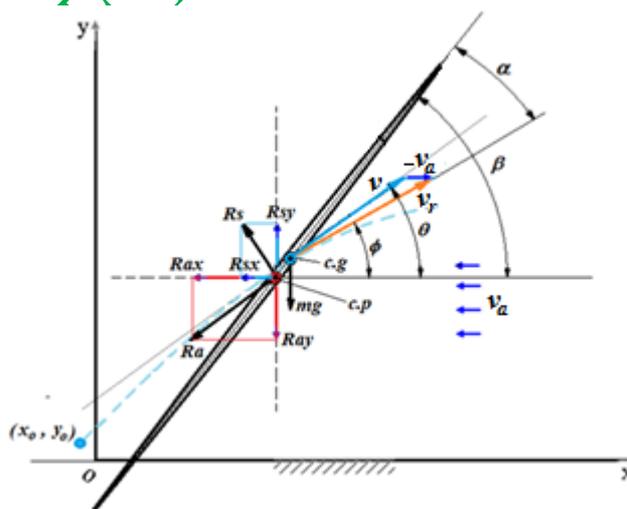


Fig.1 Diagrama de Cuerpo Libre de la Jabalina.

En la figura se destacan los siguientes parámetros (unidades en el sistema Internacional (SI):

$x-o-y$ – sistema de coordenadas cartesianas fijo a la tierra y que contiene el plano de la trayectoria del centro de gravedad (c.g.) de la jabalina, siendo $o-x$ la superficie del suelo;

c.p. – centro de presiones (punto de aplicación de la resultante de las fuerzas aerodinámicas que ejerce el aire circundante sobre la jabalina)

a_{cp} – distancia desde el centro de presiones al centro de gravedad;

v – velocidad absoluta (tangente a la trayectoria) del centro de gravedad de la jabalina;

v_a – componente horizontal de la velocidad de la corriente de aire ambiente en el plano $x-o-y$ de la trayectoria de la jabalina;

v_r – velocidad relativa entre el aire y la jabalina en el plano $x-o-y$;

α – ángulo de ataque de la jabalina;

β – ángulo de actitud de la jabalina (ángulo entre el eje longitudinal de la jabalina y el eje horizontal);

θ – ángulo de trayectoria de la jabalina (ángulo que forma la velocidad absoluta de la jabalina con la horizontal);

ϕ – ángulo con la horizontal de la velocidad relativa de la jabalina respecto al aire;

R_a – fuerza de arrastre, (resistencia aerodinámica que ofrece el aire al desplazamiento de la jabalina, la cual se aplica en el centro de presiones (c.p.) y actúa en sentido contrario a la velocidad relativa v_r entre el aire y la jabalina;

R_s – fuerza de sustentación aerodinámica de la jabalina, la cual se aplica en el centro de presiones (c.p.) y es perpendicular a la dirección de la velocidad relativa v_r ;

m – masa de la jabalina;

g – aceleración de la gravedad, $g=9.8$ [m/s²];

x_o, y_o – coordenadas del punto de liberación de la jabalina.

Las ecuaciones diferenciales de la dinámica del vuelo de la jabalina pueden determinarse partiendo de la aplicación de la 2ª Ley de Newton al cuerpo libre de la jabalina, para lo cual se ha tenido en cuenta, durante la idealización del

fenómeno, algunas restricciones dirigidas a simplificar el modelo y por ende el tratamiento matemático para su solución.

La primera restricción está asociada a la no consideración del efecto del momento de fuerzas que actúa sobre la jabalina en el plano de su trayectoria. Es conocido de estudios previos (Hatton, 2005; Maheras, 2013) que durante el vuelo de la jabalina el centro de presiones no coincide con el centro de gravedad, provocándose un momento de fuerzas resultante, denominado “pitching moment”. Este momento provoca una aceleración angular que es variable y de carácter alternativo, ya que a su vez, las distancias entre el centro de presiones y el centro de gravedad son variables (González *et.al.*, 2019). Esta aceleración angular variable incide en la rotación de la jabalina en el plano de su trayectoria y coadyuva a la estabilidad del vuelo. En el modelo que se propone en este artículo, el efecto que pudiera ocasionar esta rotación sobre la trayectoria y alcance final de la jabalina es despreciado. Para esto se asume que los efectos de la oscilación hacia un lado de la posición que tuviera la jabalina si no oscilara, se anulan con los efectos hacia el otro lado de dicha posición. Por otro lado, en un trabajo previo de los autores (González-Martínez, *et. al.*, 2019) fue determinado que los momentos de rotación máximos que se producen en la jabalina no sobrepasan los 0,2 N.m.

Otra restricción que se asume durante la idealización del fenómeno es el relativo a despreciar el efecto de las vibraciones elásticas de la jabalina sobre su trayectoria y alcance final. Este efecto fue estudiado por Maryniak *et.al.* (2009), quienes concluyen que no influye decisivamente en la trayectoria y alcance del implemento.

Una tercera restricción ha sido no considerar el posible efecto sobre la trayectoria y alcance de la jabalina, del movimiento de precesión que pudiera efectuar la jabalina en la dirección perpendicular al plano teórico de vuelo.

Producto de estas restricciones, durante la aplicación de la 2ª Ley de Newton solo son consideradas las ecuaciones que describen las relaciones entre las fuerzas y las aceleraciones contenidas en el plano de la trayectoria de la jabalina, las cuales se expresan como:

$$Ra_x + Rs_x = m \cdot \frac{dv_x}{dt} \dots\dots\dots 1$$

$$m \cdot g + Ra_y - Rs_y = m \cdot \frac{dv_y}{dt} \dots\dots\dots 2$$

Los componentes Ra_x y Ra_y se determinan partiendo de la fuerza Ra de arrastre, la cual se expresa como (White, F.M., 2011; Golf, J.E., 2013):

$$R_a = \frac{1}{2} \cdot C_a \cdot S_s \cdot \gamma (Vr)^2 \dots\dots\dots 3$$

siendo:

C_a – coeficiente de arrastre aerodinámico de la jabalina, que varía en función del ángulo de ataque ($C_a = f_1(\alpha)$);

γ – densidad del aire;

S_s – área de la sección longitudinal de la jabalina.

Los componentes R_{sx} y R_{sy} se determinan partiendo de la fuerza R_s de sustentación aerodinámica de la jabalina, la cual se expresa como (White, F.M., 2011; Golf, J.E., 2013):

$$R_s = \frac{1}{2} \cdot C_s \cdot S_s \cdot \gamma (V_r)^2 \dots\dots\dots 4$$

siendo:

C_s - coeficiente de sustentación aerodinámica de la jabalina, el cual también es variable en función del ángulo de ataque $C_s = f_2(\alpha)$;

Las funciones $C_a = f_1(\alpha)$ y $C_s = f_2(\alpha)$, para las jabalinas de ambos sexos, son obtenidas por los autores mediante la aplicación de herramientas de Dinámica de Fluidos Computacional (González-Martínez, *et.al*, 2019), resultando polinomios de tercer orden con coeficientes de determinación $R^2 \geq 0,99$, dados por las siguientes funciones:

$$C_a = c_3 \cdot \alpha^3 + c_2 \cdot \alpha^2 + c_1 \cdot \alpha + c_0 \dots\dots\dots 5$$

$$C_s = c_3 \cdot (\alpha + 5)^3 + c_2 \cdot (\alpha + 5)^2 + c_1 \cdot (\alpha + 5) + c_0 \dots\dots\dots 6$$

Los valores de los coeficientes c_i se brindan en la Tabla 1, donde los subíndices h y f corresponden a los sexos masculino y femenino, respectivamente.

Tabla 1. Coeficientes de las funciones $C_a = f_1(\alpha)$ y $C_s = f_2(\alpha)$ para las jabalinas de ambos sexos.

| | c_3 | c_2 | c_1 | c_0 |
|----------|----------------------|----------------------|--------|-------|
| C_{ah} | $-2 \cdot 10^{-6}$ | $2.42 \cdot 10^{-4}$ | 0 | 0.077 |
| C_{af} | $-1.4 \cdot 10^{-6}$ | $1.80 \cdot 10^{-4}$ | 0 | 0.075 |
| C_{sh} | $-2 \cdot 10^{-6}$ | $2.35 \cdot 10^{-4}$ | 0.001 | 0 |
| C_{sf} | $-1 \cdot 10^{-6}$ | $1.20 \cdot 10^{-4}$ | 0.0025 | 0 |

El ángulo ϕ que forma la velocidad relativa de la jabalina con respecto a la horizontal está dado por:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{v \cdot \text{sen}\theta}{v \cdot \text{cos}\theta - v_a} \right) \dots\dots\dots 7$$

y el ángulo θ que forma la velocidad absoluta de la jabalina con respecto a la horizontal está dado por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \dots\dots\dots 8$$

mientras que:

$$\alpha = \beta - \phi \dots\dots\dots 9$$

Las coordenadas de la trayectoria del centro de masa de la jabalina se determinan como:

$$x = x_o + \int v_x \cdot dt \dots\dots\dots 10$$

$$y = y_o + \int v_y \cdot dt \dots\dots\dots 11$$

De esta manera queda conformado un sistema de ecuaciones cuya solución permite la determinación de todos los parámetros inherentes al vuelo de la jabalina ($Ra, Rax, Ray, Rs, Rsx, Rsy, v, v_x, v_y, v_r, v_{rx}, v_{ry}, \alpha, \theta, \phi, x, y$).

Para la solución del sistema de ecuaciones se elaboró un programa de computación en soporte Mathcad, basados en la aplicación del método de Runge-Kutta, evaluándose las expresiones para pequeños intervalos de tiempo Δt cuya duración se selecciona en el propio programa. Entre esos intervalos de tiempo se supone un movimiento con aceleración constante, lo que facilita el tratamiento de las expresiones.

MATERIALES Y MÉTODOS EMPLEADOS PARA LA VALIDACIÓN DEL MODELO TEÓRICO

La validación del modelo teórico de predicción de la trayectoria y distancia de alcance del implemento se efectuó por dos vías:

- Evaluando el modelo con los datos de entrada procedentes de los experimentos de lanzamiento ejecutados en el marco de esta investigación y entonces comparando los alcances de los lanzamientos experimentales con los calculados mediante el modelo propuesto y mediante otros modelos reportados en la literatura;
- Evaluando el modelo propuesto con datos procedentes de competencias internacionales (Best *et. al*, 1993) y comparando los resultados de salida del modelo con el alcance obtenido en dichos lanzamientos, así como comparando con el resultado obtenido con otros modelos reportados en la literatura.

La investigación experimental fue realizada en el área deportiva de la Facultad de Cultura Física, adscrita a la Universidad Agraria de La Habana. Para la ejecución de los lanzamientos del implemento previstos en el diseño experimental se seleccionaron dos estudiantes varones de 4o. y 5o cursos de la especialidad de eventos múltiples, especializados en el lanzamiento de la jabalina. En total fueron ejecutados 15 lanzamientos, en los que fueron determinados los siguientes parámetros:

En calidad de variables independientes (Fig. 2) fueron consideradas las siguientes:

- Velocidad de liberación del implemento: v_o ;
- Ángulo inicial de la trayectoria (ángulo de liberación) del implemento: θ_o ;
- Ángulo de ataque inicial: α_o ;
- Altura de liberación (distancia desde el suelo hasta el centro de gravedad del implemento al momento que pierde el contacto con la mano del atleta): y_o ;
- Distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y la línea de foul: x_o .



Figura 2. Representación de las variables independientes objeto de determinación mediante procesamiento de imágenes.

Como variable dependiente principal fue definido el alcance del implemento (x_f) medido desde la línea de lanzamiento hasta la punta de la jabalina al concluir su trayectoria de vuelo.

Como variables de control fueron determinadas las siguientes:

- Magnitud y sentido del componente horizontal de la velocidad del aire en el plano de la trayectoria del vuelo de la jabalina, medido a una altura media de dicha trayectoria: v_a ;
- Masa de la jabalina empleada en los experimentos: m

- Posición del centro de gravedad de la jabalina (distancia entre el c.g. y la punta de la jabalina): L_{cg} ;
- Aceleración de la gravedad: g .

Para la determinación de las variables independientes, que en definitiva constituyen los parámetros iniciales del lanzamiento, se aplicó el método óptico de captura de movimiento (Pueo y Jiménez, 2017), tomándose películas digitales de los 15 lanzamientos que componían la muestra objeto de investigación, para su análisis posterior con medios computarizados de procesamiento de imágenes.

Para la filmación de las imágenes fue utilizada una cámara de vídeo Marca Canon EOS 70 D con un objetivo de 70,2 mm, colocada a una distancia de filmación $L=10$ m, según se muestra en la Fig. 3. Las filmaciones se realizaron con una resolución de 1280 X 720 a 60 fotogramas por segundo, con una velocidad de ocultación de 1/4000 segundos. Para determinar la escala durante el procesamiento de las imágenes, previo a las filmaciones se tomaron imágenes de reglas graduadas de topografía en posiciones horizontal y vertical. Los filmes fueron procesados en el Laboratorio de Tecnologías Educativas de la Universidad Agraria de La Habana (LATED) mediante el software Adobe AfterEffect CC 2017, obteniéndose las imágenes de cada fotograma para su posterior procesamiento en un editor de imágenes, empleándose en este caso el programa Paintbrush de Windows.

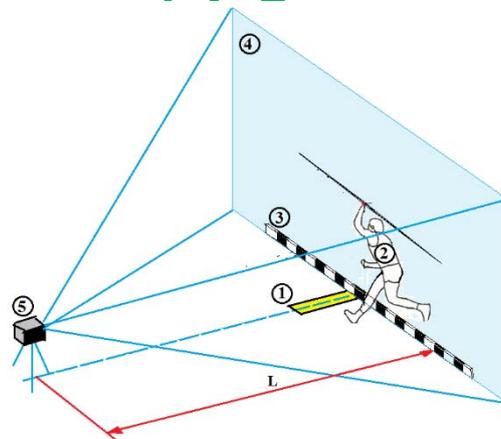


Figura 3. Esquema de la filmación de los eventos de lanzamiento. 1) línea de lanzamiento; 2) atleta; 3) Escala graduada; 4) campo de filmación; 5) cámara digital de vídeo; L : distancia de la cámara hasta la línea de lanzamiento.

Sobre las imágenes correspondientes a los cuadros objeto de estudio, importadas al programa Paintbrush, son localizadas las coordenadas significativas (Fig. 4). Los valores de estas coordenadas son llevadas a una hoja de cálculo Excel donde se programan las ecuaciones que posibilitan determinar los parámetros iniciales del lanzamiento, empleando las expresiones mostradas en la propia Fig. 4.

La distancia alcanzada por el implemento (variable dependiente) fue medida directamente en el campo de lanzamientos, empleando para ello una cinta métrica con menor división de 1 cm. La distancia fue tomada desde la línea de lanzamiento hasta el punto de contacto de la punta de la jabalina con el suelo al finalizar la trayectoria de vuelo. La componente de la velocidad del aire en el plano de vuelo fue medida con un anemómetro digital modelo PROVA AVM-01 con precisión hasta 0,1 m/s. Para la medición, el captador de la velocidad del aire era situado con su eje de rotación paralelo a la dirección del eje horizontal contenido en el plano del vuelo del implemento y a una altura del suelo entre 6 y 10 m. Producto de la peligrosidad de efectuar las lecturas de la velocidad del viento en el momento del lanzamiento, éstas eran tomadas inmediatamente antes y después de cada lanzamiento, promediándose dichos valores.

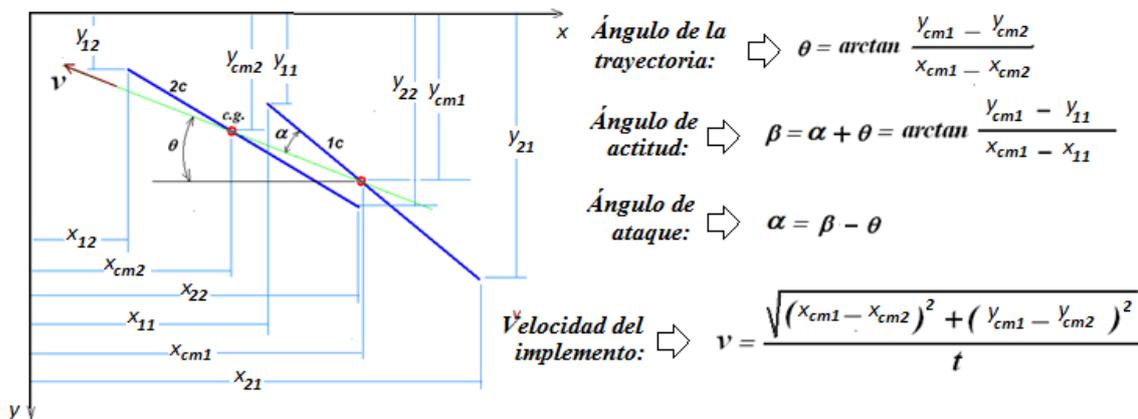


Fig. 4 Coordenadas significativas tomadas durante el procesamiento de las imágenes.

Con vistas a lograr un nivel de variabilidad en los experimentos, se orientó a los atletas tratar de ejecutar los lanzamientos con diferentes ángulos iniciales de liberación del implemento, así como con diferentes ángulos de ataque. Por otro lado, se tuvo en cuenta efectuar experimentos, tanto con el aire ambiente a favor, como en contra a la dirección del lanzamiento.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una muestra de las filmaciones ya procesadas, correspondientes a uno de los 15 lanzamientos realizados con vistas a la validación del modelo de predicción, se brinda en la Fig. 5. Los fotogramas corresponden a instantes de tiempo antes, durante y después de la liberación del implemento, a partir de los cuales es posible calcular los parámetros iniciales del lanzamiento.



Fig. 5 Sucesión de cuadros en el entorno de la liberación del implemento.

Es de interés señalar, que dada la velocidad de filmación, el tiempo transcurrido entre un fotograma y otro es de 16,67 ms, suficiente para “detener” la jabalina con suficiente nitidez y poder precisar los puntos característicos según la metodología expuesta (Fig. 4). El resultado del procesamiento de los datos procedentes de los fotogramas seleccionados de la filmación, permitió, mediante la aplicación de las expresiones de la Fig. 4 y su programación en hojas de cálculo Excel, construir los gráficos de la posición en el espacio de la jabalina (Fig. 6) y determinar los parámetros iniciales de los lanzamientos filmados.

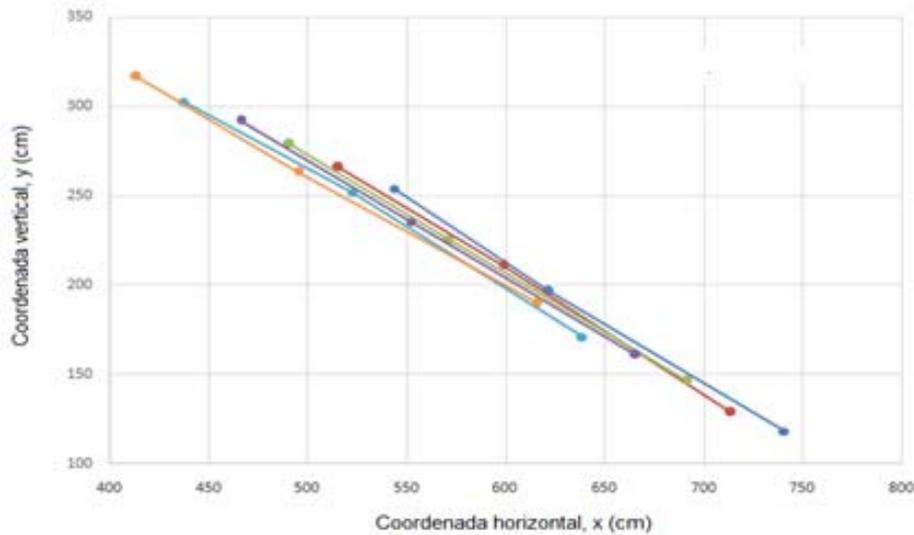


Fig.6 Resultado gráfico de la posición de la jabalina en el plano de la trayectoria, correspondiente al lanzamiento No. 1.

Un resumen de los parámetros iniciales obtenidos después del procesamiento de los fotogramas se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de los estadígrafos de los parámetros iniciales de los lanzamientos, obtenidos del procesamiento de los fotogramas.

| Estadígrafo | Vel. de liberación v_0 (m/seg) | Angulo inicial de la trayectoria θ_0 (°) | Angulo de ataque inicial positivo α_0 (°) | Angulo de ataque inicial negativo α_0 (°) | Altura de liberación y_0 (m) | Distancia del punto de liberación a la línea de lanzamiento x_0 (m) |
|-------------|----------------------------------|---|--|--|--------------------------------|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) |
| Promedio | 18,21 | 32,22 | 5,40 | -4,38 | 2,10 | 2,34 |
| Desv. Est. | 1,13 | 3,53 | 2,75 | 4,95 | 0,10 | 0,78 |
| Valor máx. | 20,17 | 38,98 | 8,15 | -11,25 | 2,35 | 3,76 |
| Valor mín. | 15,32 | 23,69 | 1,79 | -0,57 | 1,90 | 0,53 |

La velocidad del aire ambiente, tomada en la dirección horizontal del plano de la trayectoria del implemento, osciló entre -3 m/s (en contra del movimiento del implemento) y +1,5 m/s (a favor del movimiento del implemento), promediando los valores positivos 1,45 m/s con una desviación estándar de 0,14 m/s, mientras que los valores negativos promediaron -2,33 m/s con una desviación estándar de 0,76 m/s. Por último, la medición del alcance del lanzamiento, medido desde

la línea de lanzamiento, promedió 31,03 m, oscilando entre 23,22 m y 35,65 m, con una desviación estándar de 3,12 m.

Para la evaluación del modelo de predicción, el sistema de ecuaciones surgidas del análisis de la dinámica y cinemática de la interacción de la jabalina con el aire y la gravedad durante el vuelo, fue resuelto mediante su programación en Mathcad, resultando el programa "Javelin" que ha sido registrado en el Centro de Derecho de Autor de la República de Cuba (CENDA, 2018 y 2018a). El carácter determinístico del modelo asegura la ausencia de incertidumbre en el resultado de su evaluación, o sea, para un juego dado de variables de entrada, siempre se obtiene el mismo resultado o respuesta de salida.

El modelo brinda como salida fundamental un gráfico de la trayectoria de la jabalina, así como tablas de datos de los que se puede determinar parámetros de salida, tales como: el alcance del implemento, el tiempo de vuelo, la altura máxima que alcanza la trayectoria, los valores de las fuerzas de arrastre y sustentación en función de la posición de la jabalina en toda la trayectoria, los ángulos que caracterizan la posición de la jabalina durante el vuelo y otros datos de interés. En la Fig.7 se muestra un gráfico de salida correspondiente a la ejecución del programa "Javelin" con datos de entrada tomados por Campos et.al. (2004), correspondientes al mejor lanzamiento del cubano Emeterio González (84,32 m) durante el Campeonato Mundial de Atletismo de la IAAF, Valencia, 1999.

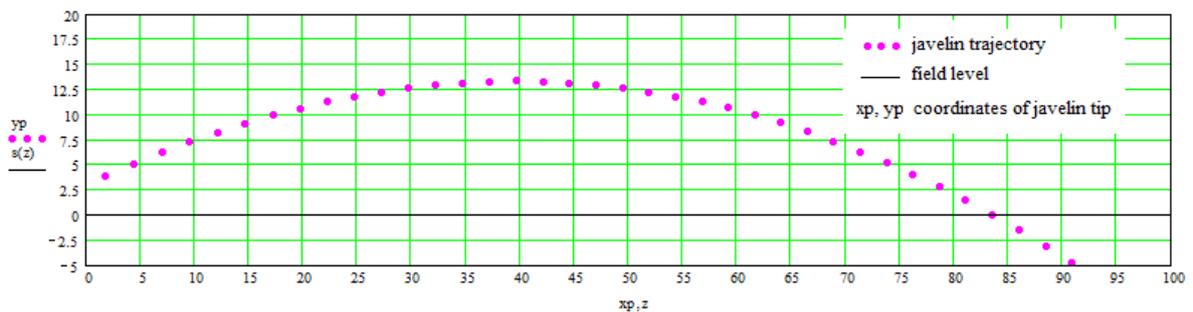


Figura 7. Resultado del cálculo con el programa "Javelin" de la trayectoria de lanzamiento realizado por Emeterio González en Mundial de Atletismo, 1999.

La primera vía de validación se efectuó evaluando el modelo con los datos de entrada procedentes de los experimentos de lanzamiento ejecutados en el marco de esta investigación y entonces comparando los alcances de los lanzamientos (variable de salida o dependiente) medidos experimentalmente, con los calculados mediante el modelo.

En la figura 8 se muestran los resultados de un análisis de regresión efectuado entre el alcance de los lanzamientos medidos experimentalmente y la predicción obtenida mediante la evaluación del modelo con los datos iniciales de cada lanzamiento. De las líneas de tendencia obtenidas se aprecia una fuerte relación entre las predicciones del modelo y los datos experimentales, caracterizada por altos coeficientes de determinación R^2 . Un resultado perfecto (casi imposible de lograr, no solo desde el punto de vista del modelo, sino producto de la exactitud de las mediciones experimentales), sería una pendiente igual a la unidad y un

coeficiente de correlación $R=1$. Puede apreciarse que aunque no se logra este nivel, el resultado es muy satisfactorio. El error en porcentaje de la predicción del modelo con relación a la medición experimental, solo en uno de los lanzamientos resultó superior al 2%, mientras que el valor medio modular de los errores promedió 0,65 %.

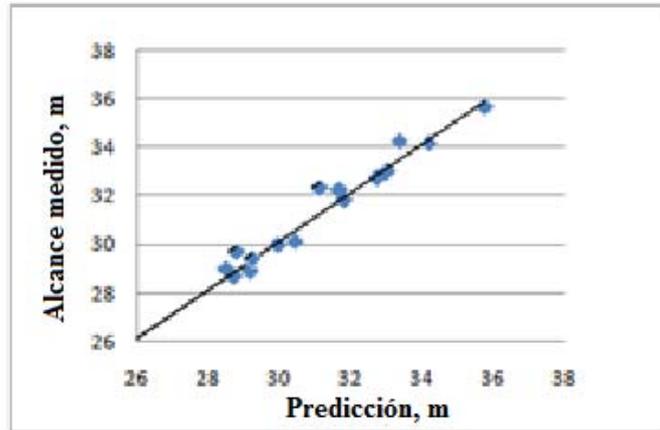


Figura 8. Correlación entre el alcance de los lanzamientos medidos experimentalmente y calculados mediante el modelo y el programa “Javelin”,
(Ecuación de regresión: $y = 1.003 x$; Coeficiente de determinación: $R^2 = 0.989$)

Una segunda vía de validación consistió en evaluar el modelo con datos procedentes de competencias internacionales, así como con resultados de la evaluación de otros modelos reportados en la literatura. Para esto se seleccionó un grupo de datos iniciales de lanzamientos tomados por Best *et. al*, (1993) en los Juegos Mundiales Estudiantiles celebrados en Sheffield, Inglaterra, en 1991, correspondientes a una selección de los mejores lanzamientos ejecutados en la modalidad femenina. Estos datos también fueron evaluados por Chiu (2009) usando simulación computarizada, por lo que sirvió de base comparativa como vía de validación del modelo “Javelin” presentado en este trabajo.

La Tabla 3 muestra los resultados compilados por Best *et. al* (1993), así como los resultados de la evaluación del modelo “Javelin” y del modelo de Chiu (2009). Ambos modelos presentan una aproximación satisfactoria al resultado real, no obstante, los errores en porcentaje obtenidos con el modelo “Javelin” resultaron inferiores a los obtenidos por Chiu (2009).

Tabla 3 Resultados de la evaluación de los modelos teóricos vs resultados experimentales obtenidos por Best *et al* (1993) en competencia mundial de la modalidad femenina.

| No. del lanzamiento | Vel. de liberación V_0 (m/seg) | Angulo inicial de la trayectoria θ_0 (°) | Angulo de ataque inicial α_0 (°) | Altura de liberación, y_0 (m) | Alcance medido x_f (m) | Alcance calculado por el modelo “Javelin” X_{fc} (m) | Alcance calculado modelo de Chiu X_{fch} (m) | Error modelo Javelin (%) | Error modelo Chiu (%) |
|---------------------|----------------------------------|---|---|---------------------------------|--------------------------|--|--|--------------------------|-----------------------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| Fem1 | 24,2 | 34,5 | 1,5 | 1,66 | 57,22 | 56,66 | 57,68 | -0,979 | 0,8 |
| Fem2 | 24,6 | 39 | 1 | 1,68 | 59,34 | 60,55 | 61,33 | 2,039 | 3,3 |
| Fem3 | 24,8 | 38 | 0,5 | 1,62 | 62,32 | 61,02 | 60,70 | -1,218 | -3,5 |

| | | | | | | | | | |
|--------------------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|
| Fem4 | 24,2 | 33,5 | 13,5 | 1,72 | 58,28 | 58,99 | 56,24 | 2,084 | -2,5 |
| Error medio modular (%) | | | | | | | | 1,58 | 2,56 |

Otra vía de validación consistió en evaluar el modelo de Hatton, 2005 (disponible en línea), introduciendo los datos procedentes de las filmaciones efectuadas en el marco de esta investigación y entonces comparar los resultados con los obtenidos durante la evaluación del modelo “Javelin” con esos mismos datos de entrada y teniendo en cuenta que el software de Hatton no comprende valores de V_0 por debajo de 18 m/s, ni valores de θ_0 inferiores a 30°. En la Fig. 9 se muestra la comparación de los resultados medidos experimentalmente con los provenientes de la evaluación de ambos modelos,

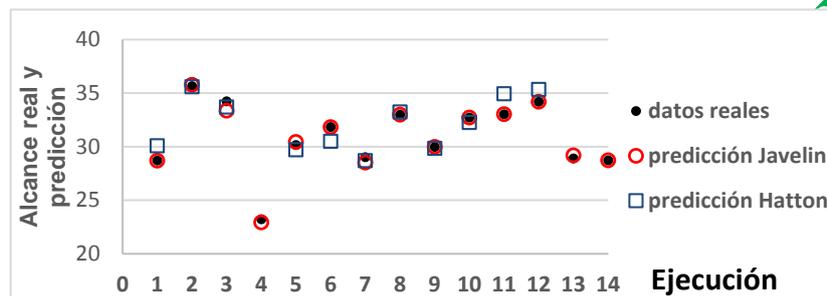


Figura 9. Comparación del alcance real del implemento con los resultados de la evaluación de los modelos “Javelin” y de Hatton, 2005.

De la figura se aprecia que los resultados del modelo “Javelin” presentan un mejor nivel de aproximación a los resultados experimentales en relación al modelo de Hatton, Un análisis estadístico del error medio modular de predicción arrojó un porcentaje de error del modelo “Javelin” de 0,65% y en el caso del modelo de Hatton, de 2,1%.

CONCLUSIONES

Se obtiene un modelo mecánico-matemático del vuelo de la jabalina en su interacción con el aire circundante y con la fuerza gravitatoria. La evaluación del modelo con la ayuda de un programa de computación elaborado a los efectos, posibilita obtener los principales parámetros que caracterizan la trayectoria del vuelo de la jabalina, en función de parámetros de entrada tales como la velocidad y ángulo de liberación del implemento y las coordenadas del punto de liberación, así como las propiedades inerciales y aerodinámicas de la jabalina.

El proceso de validación del modelo mediante la comparación de los resultados del alcance del lanzamiento calculado y el obtenido mediante mediciones experimentales, realizadas en el marco de esta investigación y a través de la comparación con resultados de competencias internacionales, arrojó un error medio de predicción entre 0,65% y 1.58%, el cual resultó inferior al obtenido con otros modelos reportados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Best, R.J., Bartlett, R.M., & Morriss, C.J. (1993) "A three-dimensional analysis of javelin throwing technique". *Journal of Sports Sciences*, 11(4), 315-328.
- Campos, J., Brizuela, G. & Ramon, V. (2004) "Three-dimensional kinematic analysis of elite javelin throwers at the 1999 IAAF World Championships in Athletics". *New studies in Athletics* 19: 47-57.
- CENDA. Centro Nacional de Derecho de Autor. (2018). Certificación de Registro No. 3582-11-2018: Software para el Cálculo de la Trayectoria de la Jabalina (Modalidad Masculina) considerando la Resistencia del Aire. La Habana. Calle 15 No. 604 Vedado. cenda@cenda.cu
- CENDA. Centro Nacional de Derecho de Autor. (2018a). Certificación de Registro No. 3581-11-2018: Software para el Cálculo de la Trayectoria de la Jabalina (Modalidad Femenina) considerando la Resistencia del Aire. La Habana. Calle 15 No. 604 Vedado. cenda@cenda.cu
- Chiu, C.H. (2009) Discovering Optimal Release Conditions for the Javelin World Record Holders by Using Computer Simulation. *International Journal of Sport and Exercise Science*, 1(2):41-50.
- Goff, J.E. (2013). A review of recent research into aerodynamics of sport projectiles. *Sports Eng.* 16:137–154.
- González-Martínez, A.; Martínez-Rodríguez, A., y Laffita-Leyva, A. (2019). Determinación de Propiedades Aerodinámicas de la Jabalina Mediante Dinámica de Fluidos Computacional. *RICYDE. Revista Internacional de Ciencias del Deporte*. 15 (56).
- Hatton, L. (2007). Optimising the javelin throw in the presence of prevailing winds. Faculty of Computing, Information Systems and Mathematics, University of Kingston. January 28, 2007. Original paper 8th August, 2005.
- Hatton L. (2005). Javelin flight analyser. Disponible en: [http://www.leshatton.org/javelin 2005. html](http://www.leshatton.org/javelin%2005.html). Consultado en 12 Feb. 2018.
- Jiang, M., & Zhou, J. H. (2014) Optimization Calculation of Javelin Throwing Results. *Applied Mechanics and Materials*. Vols. 716-717, pp. 764-766, Dec. 2014.
- Maheras, A.V. (2013) Basic Javelin Aerodynamics and flight characteristics. *Techniques for Track & Field and Cross Country*. 7 (1), 31-41.
- Maryniak, J.; Ładyżyńska-Kozdraś; E. Golińska (2009). Mathematical modeling and numerical simulations of javelin throw. *Human Movement* 2009, vol. 10 (1), 16–20
- Mero, A.; Komi, P.V.; Korjus, T.; Navarro, E., & Gregor, R. (1994). Body segment contributions to javelin throwing during final thrust phase. *Journal of Applied- Biomechanics, Champaign, Ill.* 10(2), 166-177.
- Morris, C., & Bartlett, R., (1996). Biomechanical factors critical for performance in the men's Javelin throw. *Sports Medicine*. Auckland,- N.Z. 21(6): 438-446
- Pueo-Ortega, B.; Jiménez-Olmedo, J.M. (2017). Application of motion capture technology for sport performance analysis. *Retos: nuevas tendencias en educación física, deporte y recreación*. Año 2017. No. 32 (2º semestre).
- Soong, T.C. (1982). Biomechanical analyses and applications of shot put, discus and javelin throws. In D.N. Ghista (Ed.). *Human Body Dynamics: Impact, Occupational, and Athletic Aspects* (pp.462-497). Oxford: Clarendon press.

White, C. (2013). Projectile Dynamics in Sport. Principles and applications. Routledge Chapman & Hall Publisher. ISBN 9780415833141
White, F.M. (2011) Fluid Mechanics, 7th edn. McGraw-Hill. Higher Education, New York

Número de citas totales / Total references: 18 (100%)

Número de citas propias de la revista / Journal's own references: 0 (0%)

PENDIENTE DE PUBLICACIÓN / IN PRESS

ANEXO 1

1.1 Muestra de capturas de pantalla del programa “Javelin M”



Javelin-M para capturas

Posición inicial del lanzamiento
 $y_j := 1.80 \text{ m}$ $y_0 = 1.8$
 $x_j := -1.5 \text{ m}$ $x_0 = -1.5$

Dimensiones de la jabalina:
 Diámetro en la empuñadura: $d := 0.025 \text{ m}$
 Area de la sección longitudinal: $S_s := 0.0613 \text{ m}^2$
 Distancia del c.g a la punta: $b := 1.10 \text{ m}$
 Masa de la jabalina $m := 0.800 \text{ kg}$

Coordenadas de la punta
 $x_{p_j} := x_j + b \cdot \cos(\beta_j)$ $y_{p_j} := y_j + b \cdot \sin(\beta_j)$

Densidad del aire: $\gamma := 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Aceleración de la gravedad $g := 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

DESARROLLO DE LOS CÁLCULOS

Posición $j := 1$ +

Ángulo que forma la velocidad relativa con la horizontal entre dos posiciones:

$$\phi_j := \text{atan}\left(\frac{V_{j-1} \cdot \sin(\theta_{j-1})}{V_{j-1} \cdot \cos(\theta_{j-1}) - V_a}\right)$$

S

PEN

Javelin-M para capturas

$\phi_j = 0.552 \text{ rad}$ $\phi_{grj} := \phi_j \cdot \frac{180}{\pi}$ $\phi_{grj} = 31.61_{(o)}$

Determinar ángulo de ataque de la jabalina:

$\alpha_j := \alpha_0 + \theta_{j-1} - \phi_j$

$\alpha_j = 0.076 \text{ rad}$ $\alpha_{grj} := \alpha_j \cdot \frac{180}{\pi} \text{ rad}$ $\alpha_{grj} = 4.38_{(o)}$

Determinar ángulo de actitud:

$\beta_j := \phi_j + \alpha_j$ $\beta_j = 0.628 \text{ rad}$ $\beta_{grj} := \beta_j \cdot \frac{180}{\pi}$ $\beta_{grj} = 36_{(o)}$

Determinar Coeficiente de resistencia (arrastre) para la jabalina modalidad femenino:

$C_{aj} := \left[-2 \cdot 10^{-6} \cdot (\alpha_{grj})^3 \right] + 2.42 \cdot 10^{-4} \cdot (\alpha_{grj})^2 + 0.077$

$C_{aj} = 0.081$

Determinar Coeficiente de sustentación para la jabalina modalidad femenino:

$C_{sj} := -2 \cdot 10^{-6} \cdot (\alpha_{grj} + 5)^3 + 2.35 \cdot 10^{-4} \cdot (\alpha_{grj} + 5)^2 + 1 \cdot 10^{-3} \cdot (\alpha_{grj} + 5)$

$C_{sj} = 0.028$

Determinar magnitud de la velocidad relativa entre la jabalina y el aire entre dos posiciones:

$V_{rj} := \sqrt{(V_{j-1} \cdot \sin(\theta_{j-1}))^2 + (V_{j-1} \cdot \cos(\theta_{j-1}) - V_a)^2}$ $V_{rj} = 31.547_{(o)}$

PENDING

PENDING

Javelin-M para capturas

Determinar Fuerza de resistencia (fuerza de arrastre o drag force) del aire entre dos posiciones:

$$R_{aj} := \frac{1}{2} C_{aj} \cdot S_s \cdot \sin(\alpha_j) \cdot \gamma \cdot (V_{rj})^2 \quad \text{N} \quad R_{aj} = 0.228 \quad \text{N}$$

Determinar Componentes de la fuerza de resistencia del aire en x e y entre dos posiciones:

$$R_{axj} := R_{aj} \cdot \cos(\phi_j) \quad R_{ayj} := R_{aj} \cdot \sin(\phi_j)$$

$$R_{axj} = 0.194 \quad \text{N}$$

$$R_{ayj} = 0.119 \quad \text{N}$$

Determinar Fuerza de sustentación:

$$R_{sj} := \frac{1}{2} \cdot C_{sj} \cdot S_s \cdot \cos(\alpha_j) \cdot \gamma \cdot (V_{rj})^2 \quad \text{N} \quad R_{sj} = 1.037 \quad \text{N}$$

Componentes de la fuerza de sustentación (lift force) en x e y entre dos posiciones:

$$R_{sxj} := R_{sj} \cdot \sin(\phi_j) \quad R_{syj} := R_{sj} \cdot \cos(\phi_j)$$

$$R_{sxj} = 0.544 \quad \text{N}$$

$$R_{syj} = 0.883 \quad \text{N}$$

Determinar aceleración, velocidad y posición del centro de masa:

Determinar Aceleración en x

$$a_{xj} := \frac{R_{axj} + R_{sxj}}{m} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_{xj} = 0.92 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Determinar Aceleración en y

$$a_{yj} := \frac{R_{ayj} + m \cdot g - R_{syj}}{m} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad a_{yj} = 8.848 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Javelin-M para capturas

Declarar intervalo de tiempo a evaluar:

$$\Delta t := 0.1 \text{ s}$$

Determinar Velocidad en x:

$$V_{xj} := V_{j-1} \cdot \cos(\theta_{j-1}) - a_{xj} \cdot \Delta t \quad V_{xj} = 23.973 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinar Velocidad en y:

$$V_{yj} := V_{j-1} \cdot \sin(\theta_{j-1}) - a_{yj} \cdot \Delta t \quad V_{yj} = 15.654 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinar Recorrido en x:

$$x_j := x_{j-1} + V_{j-1} \cdot \cos(\theta_{j-1}) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a_{xj} \cdot \Delta t^2 \quad x_j = 0.902 \text{ m}$$

Determinar recorrido en y (altura del c.m. de la jabalina con respecto al suelo):

$$y_j := y_{j-1} + V_{j-1} \cdot \sin(\theta_{j-1}) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a_{yj} \cdot \Delta t^2 \quad y_j = 3.41 \text{ m}$$

Determinar Coordenadas de la punta de la jabalina:

$$x_{pj} := x_j + b \cdot \cos(\beta_j) \quad y_{pj} := y_j + b \cdot \sin(\beta_j) \quad x_{pj} = 1.792 \text{ m}$$

$$y_{pj} = 4.056 \text{ m}$$

Determinar Módulo de la Velocidad Absoluta:

$$V_j := \sqrt{(V_{xj})^2 + (V_{yj})^2} \quad V_j = 28.631 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinar ángulo tangente a la trayectoria que define la dirección de la velocidad absoluta de la jabalina:

$$\theta_j := \text{atan}\left(\frac{V_{yj}}{V_{xj}}\right) \quad \theta_{grj} := \theta_j \cdot \frac{180}{\pi} \quad \theta_{grj} = 33.145$$

Javelin-F para capturas

Se repiten los cálculos para $j = 1 \dots n$

+

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

$t := 1, 1.1 \dots 10$

| | |
|----|-----|
| | 0 |
| 25 | 3.5 |
| 26 | 3.6 |
| 27 | 3.7 |
| 28 | 3.8 |
| 29 | 3.9 |
| 30 | 4 |
| 31 | 4.1 |
| 32 | 4.2 |
| 33 | 4.3 |
| 34 | 4.4 |
| 35 | 4.5 |
| 36 | 4.6 |
| 37 | 4.7 |
| 38 | 4.8 |
| 39 | 4.9 |
| 40 | 5 |

$t =$

| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 25 | 57.98 |
| 26 | 60.285 |
| 27 | 62.59 |
| 28 | 64.895 |
| 29 | 67.2 |
| 30 | 69.507 |
| 31 | 71.814 |
| 32 | 74.123 |
| 33 | 76.434 |
| 34 | 78.747 |
| 35 | 81.062 |
| 36 | 83.38 |
| 37 | 85.701 |
| 38 | 88.025 |
| 39 | 90.352 |
| 40 | 92.683 |

$x_p =$

| | |
|----|--------|
| | 0 |
| 25 | 15.221 |
| 26 | 14.543 |
| 27 | 13.774 |
| 28 | 12.911 |
| 29 | 11.957 |
| 30 | 10.91 |
| 31 | 9.771 |
| 32 | 8.539 |
| 33 | 7.215 |
| 34 | 5.797 |
| 35 | 4.287 |
| 36 | 2.684 |
| 37 | 0.987 |
| 38 | -0.802 |
| 39 | -2.686 |
| 40 | -4.662 |

$y_p =$

| | |
|----|---------|
| | 0 |
| 25 | -10.64 |
| 26 | -12.816 |
| 27 | -14.953 |
| 28 | -17.044 |
| 29 | -19.087 |
| 30 | -21.075 |
| 31 | -23.007 |
| 32 | -24.88 |
| 33 | -26.691 |
| 34 | -28.441 |
| 35 | -30.127 |
| 36 | -31.751 |
| 37 | -33.313 |
| 38 | -34.813 |
| 39 | -36.253 |
| 40 | -37.633 |

$\beta_{gr} =$

⇒

El valor de x_p correspondiente a $y_p=0$ coincidirá con el alcance máximo del implemento. En este caso estará entre 85,70 y 88,02 m, lo cual se precisa en el gráfico de la trayectoria.

S

PEND

